ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 24, № 125 2019

DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-99-111

УДК 517.957.6

Убывание решений обобщенного уравнения Кортевега–де Фриза при больших временах

Артем Александрович НИКОЛАЕВ

ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов»

117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. М. Маклая, 6

ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4561-8990, e-mail: nicepeopleproject@gmail.com

Decay of the solutions of the generalized Korteweg–de Vries equation at large times

Artyom A. NIKOLAYEV

RUDN University

6 Mikhlukho-Maklaya St., Moscow 117198, Russian Federation

ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4561-8990, e-mail: nicepeopleproject@gmail.com

Аннотация. В данной работе доказано существование слабых решений для нелинейного обобщенного уравнения Кортевега–де Фриза и найдены условия, при которых слабые решения убывают к нулю при больших временах.

Ключевые слова: уравнение Кортевега–де Фриза; начально-краевая задача; слабое решение; убывание

Для цитирования: *Николаев А. А.* Убывание решений обобщенного уравнения Кортевега–де Фриза // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2019. Т. 24. № 125. С. 99–111. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-99-111

Abstract. In this paper the existence of weak solutions of the nonlinear generalized KdV equation is shown and conditions for which weak solutions decay to zero at large times are obtained.

Keywords: Korteweg–de Vries equation; initial-boundary problem; weak solution; decay

For citation: Nikolayev A. A. Ubyvanie resheniy obobshchennogo uravneniya Kortevega–de Friza pri bol'shih vremenakh [Decay of the solutions of the generalized Korteweg–de Vries equation at large times]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2019, vol. 24, no. 125, pp. 99–111. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-99-111 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Рассмотрим в $Q_T = (0,T) \times (0,L)$, $0 < T \leq +\infty$, $0 < L < +\infty$, начально-краевую задачу

$$u_t + au_x + u_{xxx} + g(u)u_x = 0, \tag{1}$$

$$u(0,x) = u_0(x),\ \forall x \in (0,L), \tag{2}$$

$$u(t,0) = u(t,L) = u_x(t,L) = 0,\ \forall t \in (0,T), \tag{3}$$

где $a \in \mathbb{R}$, функция $g \in C^1(\mathbb{R})$ и

$$|g'(u)| \leq C(|u|+1),\ \forall u. \tag{4}$$

Класс таких уравнений включает в себя уравнение Кортевега–де Фриза $g(u) = u$ и модифицированное уравнение Кортевега–де Фриза $g(u) = \pm u^2$, которые описывают распространение одномерных нелинейных волн в средах с дисперсией и без диссипации.

Аналогичные вопросы были ранее рассмотрены в статьях [1]–[4]. В статье [1] рассматривается задача для уравнения

$$u_t + u_x + u_{xxx} + g(u)u_x + b(x)u = 0,\ 0 \leq x \leq L \tag{5}$$

с начально-краевыми условиями (2), (3). Предполагается, что функция b неотрицательная и лежит в пространстве $L_2(0,L)$. Функция g такая, что $g(0) = 0$ и удовлетворяет следующему условию роста

$$|g^{(j)}(u)| \leq C(1+|u|^{p-j}),\ \forall u \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

для $j=0,1$, если $1 \leq p < 2$ и для $j=0,1,2$, если $p \geq 2$. В случае, когда $u_0 \in L_2(0,L)$, было показано, что для любого $p \in [1,2)$ и $T > 0$ задача (5), (2), (3) имеет единственное решение в пространстве $C\big([0,T]; L_2(0,L)\big) \cap L_2\big(0,T; H^1(0,L)\big)$. Также было показано, что в случае, когда $u_0 \in L_2(0,L)$, $p \in [2,4)$, для любого $T > 0$ задача (5), (2), (3) имеет решение в пространстве $C_\omega\big([0,T]; L_2(0,L)\big) \cap L_2\big([0,T]; H^1(0,L)\big)$. В случае, если дополнительно известно, что носитель функции b содержит открытое непустое подмножество $(0,L)$, то при $p \in [1,4)$ для таких решений найдутся число $\nu > 0$, зависящее только от L, и неубывающая непрерывная функция $\beta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такие, что для всех $t > 0$ выполняется неравенство

$$||u(\cdot,t)||_{L_2(0,L)} \leq \beta(||u_0||_{L_2(0,L)})e^{-\nu t}.$$

Ранее в статье [2] для задачи (5), (2), (3) были получены аналогичные результаты в том случае, когда (6) справедливо при $p = 1$ и выполнены более сильные условия на b, чем в статье [1].

В статье [3] было показано, что в случае $g(u) = u^4$ (т. е., когда условие (6) выполняется при $p = 4$), $b \in L_\infty(0,L)$, и $u_0 \in L_2(0,L)$ имеет достаточно малую норму, задача (5), (2), (3) имеет решение в пространстве $C([0,T]; L_2(0,L)) \cap L_2(0,T; H_0^1(0,L))$ при любом $T > 0$. В том случае, когда $||u_0||_{L_2(0,L)} < R$ для некоторого малого $R > 0$, существуют положительные константы $C = C(R,T)$ и $\mu = \mu(R)$ такие, что неравенство

$$||u(t,\cdot)||_{L_2(0,L)} \leq C||u_0||^2_{L_2(0,L)}e^{-\mu t}$$

выполняется для всех $t > 0$.

В статье [4] рассматривались вопросы о существовании, единственности решений и их убывании при больших временах для начально-краевой задачи на Q_T в случае более общих уравнений. В частности, из результатов [4] следует, что начально-краевая задача с условиями (2), (3) для уравнения

$$u_t + u_{xxx} + au_x + uu_x = f(t,x),$$

имеет решение в пространстве $C([0,T];L_2(0,1)) \cap L_2(0,T;H^1(0,1))$ для любого $T>0$, если $u_0 \in L_2(0,1)$ и $f \in L_1(0,T;L_2(0,1))$. В предположении, что $f \equiv 0$ и начальное значение u_0 мало в норме $L_2(0,L)$, была получена оценка

$$||u(t,\cdot)||^2_{L_2(0,1)} \le 2e^{-kt}||u_0||^2_{L_2(0,1)}, \tag{7}$$

где k некоторая постоянная определенная в статье.

В статье [5] был рассмотрен вопрос о том, является ли условие малости начальных данных для уравнения Кортевега–де Фриза и модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза с начально-краевыми условиями (2), (3) необходимым для убывания решений к нулю при больших временах. Для ответа на этот вопрос в статье были найдены условия, при которых данные задачи имеют стационарные решения $u = u(x)$.

В данной статье мы покажем, что если $u_0 \in L_2(0,L)$, то задача (1)–(3) имеет решение в пространстве $C([0,T];L_2(0,L)) \cap L_2(0,T;H^1(0,L))$ для любого $T>0$, т. е. в том случае, когда $p=2,\ j=0,1$ в (6) и $b(x) \equiv 0$ в (5). В случае, когда начальные данные достаточно малы, будет определен интервал значений α, при которых решение убывает к нулю при больших временах и выполнена оценка, аналогичная (7).

Пусть $T>0$. Определим пространство

$$X_0(Q_T) = C([0,T];L_2(0,L)) \cap L_2(0,T;H^1(0,L)).$$

О п р е д е л е н и е 1. Пусть $u_0 \in L_2(0,L)$. Под обобщенным решением задачи (1)–(3) для некоторого $T>0$ мы будем понимать функцию $u \in X_0(Q_T)$ для которой при любой функции $\phi \in L_2(0,T;H^3(0,L))$ такой, что $\phi_t \in L_2(Q_T)$, $\phi|_{t=T} = \phi|_{x=0} = \phi|_{x=L} = \phi_x|_{x=0} = 0$, выполняется равенство

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^L (u\phi_t + au\phi_x + u\phi_{xxx} - g(u)u_x\phi)dxdt + \int\limits_0^L u_0(x)\phi(0,x)dx = 0. \tag{8}$$

Сформулируем основные результаты статьи.

Теорема 1. *Если $u_0 \in L_2(0,L)$, то для любого $T>0$ существует обобщенное решение $u(t,x)$ задачи (1)–(3).*

З а м е ч а н и е 1. Единственность решения следует из [6, Theorem 6.4], где она установлена в более широком пространстве $L_\infty(0,T;L_2(0,L)) \cap L_2(0,T;H^1(0,L))$.

Теорема 2. *Пусть* $u_0 \in L_2(0,L)$, $T > 0$,

$$CL^2 < 12,$$

где постоянная C *из условия* (4). *Пусть для некоторого* $A \in \left(\frac{CL^2}{4}, 3\right)$ *выполняются неравенства*

$$||u_0||_{L_2(0,L)} \le \left(\frac{8A}{CL} - 2L\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{9}$$

$$a < \frac{(3-A)\pi^2}{L^2(1+L)}. \tag{10}$$

Тогда единственное решение $u \in X_0(Q_T)$ *задачи* (1)–(3) *при всех* $t \in [0,T]$ *удовлетворяет неравенству*

$$||u(t,\cdot)||^2_{L_2(0,L)} \le (1+L)e^{\left(-\frac{(3-A)\pi^2}{L^2(1+L)}+a'\right)t}||u_0||^2_{L_2(0,L)}, \tag{11}$$

где

$$a' = \begin{cases} a, & a \ge 0, \\ \frac{a}{1+L}, & a < 0. \end{cases}$$

Доказательство теоремы 1 мы проведем поэтапно, сначала рассмотрим начально-краевую задачу для регуляризованного уравнения

$$u_t + au_x + u_{xxx} + g_h(u)u_x = 0, \tag{12}$$

сохранив начально-краевые условия (2), (3), где

$$g_h'(u) = g'(u)\eta(2-h|u|) + \frac{2}{h}\eta(h|u|-1),\ g_h(0) = g(0), \tag{13}$$

а $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ — «срезающая» функция такая, что $\eta(t) = 0$ при всех $t \le 0$, $\eta'(t) > 0$, $\eta(t) + \eta(1-t) = 1$ при всех $t \in (0,1)$, и $\eta(t) = 1$ при всех $t \ge 1$. Заметим, что $g_h(u)$ сходится поточечно к $g(u)$ при $h \to 0$.

В ходе дальнейших рассуждений мы будем часто использовать оценки для функций $g_h(u)$ и $g_h'(u)$:

$$|g_h'(u)| \le C(h),\ |g_h(u)| \le C(h)(|u|+1),\ \forall u, \tag{14}$$

и их равномерные по h аналоги

$$|g_h'(u)| \le C(|u|+1),\ |g_h(u)| \le C(u^2+1),\ \forall u. \tag{15}$$

Данные оценки нетрудно получить из условий (4) и (13).

Теперь покажем, что задача для уравнения (12) с начально-краевыми условиями (2), (3) разрешима локально по времени. В [4, Lemma 4.3] было показано, что у линейной начально-краевой задачи на Q_T для уравнения

$$u_t + au_x + u_{xxx} = f(t,x), \tag{16}$$

с условиями (2), (3) существует обобщенное решение $u(t,x)$ из пространства $X_0(Q_T)$ в том случае, когда $u_0 \in L_2(0,L)$, $f \in L_1(0,T;L_2(0,L))$. В этом случае при любом $t_0 \in (0,T]$ справедлива оценка

$$||u||_{X_0(Q_{t_0})} \le C(T,L)(||u_0||_{L_2(0,L)} + ||f||_{L_1(0,T;L_2(0,L))}). \tag{17}$$

Обобщенное решение задачи (16), (2), (3) понимается в смысле, аналогичном определению 1. Сформулируем другие условия существования обобщенного решения задачи.

Утверждение 1. *Пусть $u_0 \in L_2(0,L)$, тогда существует $t^* > 0$ такое, что задача для уравнения (12) с начально-краевыми условиями (2), (3) имеет обобщенное решение.*

Доказательство. Пусть $t_0 > 0$, зададим на множестве $X_0(Q_{t_0})$ отображение Λ следующим образом: $u = \Lambda v \in X_0(Q_{t_0})$ является решением на Q_{t_0} начально-краевой задачи для уравнения

$$u_t + au_x + u_{xxx} = -g_h(v)v_x \tag{18}$$

с условиями (2), (3). Покажем, что правая часть (18) лежит в пространстве $L_1(0,t_0;L_2(0,L))$. Воспользуемся оценкой (14) и интерполяционным неравенством для функций $u \in H_0^1(0,L)$, $\sup\limits_{x\in(0,L)} u^2(x) \le 2(\int\limits_0^L u^2(x)dx)^{\frac12}(\int\limits_0^L u_x^2(x)dx)^{\frac12}$:

$$\begin{aligned}
||g_h(v)v_x||_{L_1(0,t_0;L_2(0,L))} &\le C(h)\int\limits_0^{t_0}\Big(\int\limits_0^L (v^2+1)v_x^2dx\Big)^{\frac12}dt \le \\
&\le C(h)\Big(\int\limits_0^{t_0}\sup_{x\in(0,L)}|v|\Big(\int\limits_0^L v_x^2dx\Big)^{\frac12}dt + t_0^{\frac12}\Big(\int\limits_0^{t_0}\int\limits_0^L v_x^2dxdt\Big)^{\frac12}\Big) \le \\
&\le C(h)\Big(\Big(\int\limits_0^{t_0}\sup_{x\in(0,L)}v^2dxdt\Big)^{\frac12}\Big(\int\limits_0^{t_0}\int\limits_0^L v_x^2dxdt\Big)^{\frac12} + t_0^{\frac12}\Big(\int\limits_0^{t_0}\int\limits_0^L v_x^2dxdt\Big)^{\frac12}\Big) \le \\
&\le C(h)||v_x||_{L_2(Q_{t_0})}\Big(\Big(\int\limits_0^{t_0}(\int\limits_0^L v^2dx)^{\frac12}(\int\limits_0^L v_x^2dx)^{\frac12}dt\Big)^{\frac12} + t_0^{\frac12}\Big) \le \\
&\le C(h)||v||_{X_0(Q_{t_0})}\Big((\sup_{t\in(0,t_0)}||v(t,\cdot)||_{L_2(0,L)})^{\frac12}(\int\limits_0^{t_0}(\int\limits_0^L v_x^2dx)^{\frac12}dt)^{\frac12} + t_0^{\frac12}\Big) \le \\
&\le C(h)t_0^{\frac14}||v||_{X_0(Q_{t_0})}(||v||_{X_0(Q_{t_0})} + t_0^{\frac14}).
\end{aligned} \tag{19}$$

Из предыдущего неравенства следует, что условия [4, Lemma 4.3] выполнены. Получаем, что для любого v существует решение $u \in X_0(Q_{t_0})$ задачи (18), (2), (3), а значит, отображение Λ существует. Воспользуемся оценкой (17), получим

$$||\Lambda v||_{X_0(Q_{t_0})} \leq c(T)(||u_0||_{L_2(0,L)} + ||g_h(v)v_x||_{L_1(0,t_0;L_2(0,L))}) \leq$$
$$\leq c(T)(||u_0||_{L_2(0,L)} + C(h)t_0^{\frac{1}{4}}||v||_{X_0(Q_{t_0})}(||v||_{X_0(Q_{t_0})} + t_0^{\frac{1}{4}})).$$

Выберем $R = \max\{2c(T)||u_0||_{L_2(0,L)}, 2c(T)\}$,

$$t_1 = -\frac{R}{2} + \sqrt{\frac{R^2}{4} + \frac{1}{2C(h)}}.$$

Тогда если $t_2 \leq t_1$, $||v||_{X_0(Q_{t_2})} \leq R$, то

$$||\Lambda v||_{X_0(Q_{t_2})} \leq R,$$

т. е. отображение $\Lambda : v \to u$ переводит шар радиуса R с центром в нуле в пространстве $X_0(Q_{t_2})$ в себя. Теперь возьмем две функции $v, \widetilde{v} \in X_0(Q_{t_2})$, которые лежат в шаре радиуса R с центром в нуле, тогда $\omega = \Lambda v - \Lambda\widetilde{v}$ является решением задачи для уравнения

$$\omega_t + a\omega_x + \omega_{xxx} = -g_h(v)v_x + g_h(\widetilde{v})\widetilde{v}_x \tag{20}$$

с нулевыми начальными условиями. По аналогии, с оценкой (19) получим оценку правой части (20) в пространстве $L_1(0, t_2; L_2(0, L))$

$$||g_h(\tilde{v})\tilde{v}_x - g_h(v)v_x||_{L_1(0,t_2;L_2(0,L))} = ||(g_h(\tilde{v}) - g_h(v))v_x + g_h(v)(\tilde{v}_x - v_x)||_{L_1(0,t_2;L_2(0,L))} \leq$$
$$\leq C\Big|\Big||\tilde{v}-v||\tilde{v}_x|+(|v|+1)|(\tilde{v}-v)_x|\Big|\Big|_{L_1(0,t_2;L_2(0,L))} \leq C\int_0^{t_2}\int_0^L (\tilde{v}-v)^2\tilde{v}_x^2+(v^2+1)((\tilde{v}-v)_x)^2 dxdt \leq$$
$$\leq C||\tilde{v} - v||_{X_0(Q_{t_2})}t_2^{\frac{1}{4}}(||\tilde{v}||_{X_0(Q_{t_2})} + ||v||_{X_0(Q_{t_2})} + t_2^{\frac{1}{4}}),$$

а затем применим (17), получим

$$||\Lambda v - \Lambda\widetilde{v}||_{X_0(Q_{t_2})} \leq C(T, h, ||v||_{X_0(Q_{t_2})}, ||\tilde{v}||_{X_0(Q_{t_2})})t_2^{\frac{1}{4}}||\tilde{v} - v||_{X_0(Q_{t_2})}.$$

А значит, можем выбрать такое $t^* \leq t_2$, что отображение Λ при $t \in (0, t^*]$ будет сжимающим, следовательно, при таких t отображение будет иметь одну стационарную точку, которая и будет решением уравнения (12). □

Далее продолжим локальное решение задачи (12), (2), (3) на $(0, T)$. Для этого рассмотрим вспомогательное утверждение.

Утверждение 2. *Пусть $u_0 \in L_2(0, L)$, $f \in L_1(0, T; L_2(0, L))$ для некоторого $T > 0$ и $u \in X_0(Q_T)$ является обобщенным решением задачи (16), (2), (3). Тогда существует функция $\mu \in L_2(0, L)$ такая, что $\forall\, t \in (0, T]$ справедливо равенство*

$$\int_0^L u^2(t,x)dx + \int_0^t \mu^2(\tau)d\tau = \int_0^L u_0^2(x)dx + 2\int_0^t\int_0^L f(\tau,x)u(\tau,x)dxd\tau. \tag{21}$$

Доказательство. Осуществим переход к функциям, обладающими большей гладкостью. Согласно [7], если $u_0 \in D(A)$, где оператор $A = -(a\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \lambda E)$, а $D(A) = \{g \in H^3(0,L) : g(0) = g(L) = g'(L) = 0\}$, функция $f \in C^1([0,T]; L_2(0,L))$, то существует единственное решение

$$u \in C([0,T]; H^3(0,L)) \cap C^1([0,T]; L_2(0,L)),$$

задачи (16), (2), (3). Домножим уравнение (16) на $2u$ и проинтегрируем по области Q_t. В результате для любого t из $(0,T]$ получим

$$\int\limits_0^L u^2(t,x)dx + \int\limits_0^t u_x^2\Big|_{x=0} d\tau = \int\limits_0^L u_0^2(x)dx + 2\int\limits_0^t\int\limits_0^L f(x,\tau)u(x,\tau)dxd\tau. \tag{22}$$

Простыми преобразованиями получим, что

$$||u||_{C([0,t];L_2(0,L))} + ||u_x|_{x=0}||_{L_2(0,t)} \leq ||f||_{L_1(0,t;L_2(0,L))} + ||u_0||_{L_2(0,L)}. \tag{23}$$

Выберем такие последовательности $\{u_{0n}\}$, $u_{0n} \in D(A)$ и $\{f_n\}$, $f_n \in C^1([0,T]; L_2(0,L))$, которые сходятся к u_0 в $L_2(0,L)$ и к f в $L_1(0,T; L_2(0,L))$ соответственно. Тогда u_n — решение задачи (16), (2), (3), для правой части f_n и начальных данных u_{0n}. Очевидно, что $\{u_n\}$ — фундаментальная последовательность в $C([0,T]; L_2(0,L))$ и

$$||u - u_n||_{C([0,t];L_2(0,L))} \to 0.$$

Это означает, что пределом последовательности $\{u_n\}$ является обобщенное решение u. Из оценки (23), примененной к равенству (22), легко доказать, что последовательность $\{u_{nx}|_{x=0}\}$ фундаментальна и следовательно имеет пределом некоторую функцию $\mu \in L_2(0,L)$. Перейдя к пределу на множестве гладких функций в (22) получим необходимое равенство в общем случае. □

Следствие 1. *Пусть для некоторого $T > 0$ функция $u \in X_0(Q_T)$ является решением задачи (12), (2), (3), где $u_0 \in L_2(0,L)$. Тогда выполняется равенство*

$$||u||_{C([0,T],L_2(0,L))} = ||u_0||_{L_2(0,L)}. \tag{24}$$

Доказательство. Из (19) следует, что $-g_h(u)u_x \in L_1(0,T; L_2(0,L))$. Из равенства

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^L -g_h(u)u_x u(t,x)dxdt = -\int\limits_0^T\int\limits_0^L \Big(\int\limits_0^u g_h(\theta)\theta d\theta\Big)_x dxdt = 0,$$

и (21) следует (24). □

Из следствия 1 получаем утверждение о существовании глобального решения задачи (12), (2), (3).

Утверждение 3. *Если* $u_0 \in L_2(0,L)$, *то задача* (12), (2), (3) *имеет обобщенное решение в* $X_0(Q_T)$ *для любого* $T>0$.

Далее мы устремим $h \to 0$ в (12) и перейдём к первоначальной задаче (1)–(3), для успешной реализации задуманного нам потребуется оценка на производную функции u_h, такая оценка окажется следствием следующего утверждения.

Утверждение 4. *Если* $u_0 \in L_2(0,L)$, $f \in L_1(0,T;L_2(0,L))$ *для некоторого* $T>0$ *и* $u \in X_0(Q_T)$ *является обобщенным решением задачи* (16), (2), (3), *то для любого* $t \in (0,T]$ *справедливо следующее равенство*

$$\int\limits_0^L (1+x)u^2(t,x)dx + 3\int\limits_0^t\int\limits_0^L u_x^2(\tau,x)dxd\tau + \int\limits_0^t \mu^2(\tau)d\tau = \int\limits_0^L (1+x)u_0^2(x)dx +$$
$$+ a\int\limits_0^t\int\limits_0^L u^2(\tau,x)dxd\tau + 2\int\limits_0^t\int\limits_0^L (1+x)f(\tau,x)u(\tau,x)dxd\tau, \quad (25)$$

где μ *из утверждения 21.*

Доказательство. Сначала, как при доказательстве утверждения 2, получим равенство (25) в гладком случае после домножения уравнения (16) на $2(1+x)u$ и интегрирования по области Q_t. Простыми преобразованиями получим

$$||u_x||_{L_2(Q_t)} \le C(||u_0||_{L_2(0,L)} + ||f||_{L_1(0,T;L_2(0,L))}) \, \forall t \in (0,T).$$

На основании данного неравенства и рассуждениями, аналогичными доказательству утверждения 2, совершим предельный переход в (25) в гладком случае и получим (25) в общем случае. □

Следствие 2. *Пусть* $u_0 \in L_2(0,L)$, *тогда для обобщенного решения* $u \in X_0(Q_T)$ *задачи* (12), (2), (3) *справедливо неравенство*

$$||u_x||_{L_2(Q_T)} \le C(a,L,T,||u_0||_{L_2(Q_T)}). \quad (26)$$

Доказательство. Из (19) следует, что $-g_h(u)u_x \in L_1(0,T,L_2(0,L))$. Обозначим $||u_0||_{L_2(0,L)} = C_1$. В следующей оценке воспользуемся (24), (25), (15), получим

$$3\int\limits_0^T\int\limits_0^L u_x^2 dxdt \le \int\limits_0^L (1+x)u_0^2 dx + a\int\limits_0^T\int\limits_0^L u^2 dxdt - 2\int\limits_0^T\int\limits_0^L (1+x)g(u)uu_x dxdt \le$$
$$\le \int\limits_0^L (1+x)u_0^2 dx + a\int\limits_0^T\int\limits_0^L u^2 dxdt + 2\int\limits_0^T\int\limits_0^L \Big|\int\limits_0^u g(\theta)\theta d\theta\Big| dxdt \le (1+L)C_1^2 + |a|C_1^2 T +$$

$$+C_2\int\limits_0^T\int\limits_0^L(u^4+u^2)dxdt \le (1+L)C_1^2+|a|C_1^2T+C_2C_1^2\Big(\int\limits_0^T\big(\int\limits_0^L u^2dx\big)^{\frac12}\big(\int\limits_0^L u_x^2dx\big)^{\frac12}dt+T\Big)\le$$

$$\le(1+L)C_1^2+|a|C_1^2T+C_2C_1^2\Big(\frac{C_2C_1^2}{4}\int\limits_0^T\int\limits_0^L u^2dxdt+\frac{2}{C_2C_1^2}\int\limits_0^T\int\limits_0^L u_x^2dxdt+T\Big)\le$$

$$\le(1+L)C_1^2+|a|C_1^2T+\frac{C_2^2C_1^6}{4}T+2\int\limits_0^T\int\limits_0^L u_x^2dxdt+C_2C_1^2T,$$

тогда справедливо (26). □

Докажем теорему 1.

Доказательство. Из утверждения 3 следует, что для любого $h>0$ существует решение $u_h\in X_0(Q_T)$ задачи (12), (2), (3). Искомое решение задачи (1), (2), (3) будем строить как предел решений. Из (26) следует, равномерная оценка по h

$$||u_h||_{L_2(0,T;H^1(0,L))}\le C,$$

из которой получаем, что равномерно по h выполнено

$$||u_{hxxx}||_{L_2(0,T;H^{-2}(0,L))}\le C.$$

Пусть $g_h(u_h)u_{hx}=(g_h^*(u_h))_x$. Имеем

$$||g_h(u_h)u_{hx}||_{L_2(0,T;H^{-2}(0,L))}\le||g_h^*(u_h)||_{L_2(0,T;H^{-1}(0,L))}\le||g_h^*(u_h)||_{L_2(0,T;L_1(0,L))}\le$$

$$\le\Big(\int\limits_0^T\Big(\int\limits_0^L\int\limits_0^{|u_h|}|g_h(\theta)|d\theta dx\Big)^2dt\Big)^{\frac12}\le C\Big(\int\limits_0^T\big(\int\limits_0^L|u_h|^3+|u_h|dx\big)^2dt\Big)^{\frac12}\le$$

$$\le C\Big(\int\limits_0^T\sup_{x\in(0,L)}u_h^2\big((\int\limits_0^L u_h^2dx)^2+L^2\big)dt\Big)^{\frac12}\le CT^{\frac12}(||u_h||^2_{X_0(Q_T)}+L^2)||u_h||_{X_0(Q_T)}\le C.$$

Из написанных оценок и равенства (12) следует, что

$$||u_{ht}||_{L_2(0,T;H^{-2}(0,L))}\le C, \tag{27}$$

Из ранее полученных оценок (24), (26), (27) и в силу того, что $L_\infty(0,T;L_2(0,L))=(L_1(0,T;L_2(0,L)))^*$, получаем, что можем выделить такую подпоследовательность u_{h_n}, что

$$\begin{aligned}&u_{h_n}\to u \quad \text{*-слабо в } L_\infty(0,T;L_2(0,L)),\\ &u_{h_nx}\to u_x \quad \text{слабо в } L_2(Q_T),\\ &u_{h_n}\to u \quad \text{сильно в } L_2(Q_T).\end{aligned}$$

Перейдем к пределу в нелинейном члене интегрального тождества (8) при $h = h_n$:

$$\Big|\int\limits_0^T\int\limits_0^L (g_h^*(u_h) - g^*(u))\phi_x dxdt\Big| \le \int\limits_0^T\int\limits_0^L |(g_h^*(u) - g^*(u))\phi_x| dxdt + \\ + \int\limits_0^T\int\limits_0^L |(g_h^*(u_h) - g_h^*(u))\phi_x| dxdt \quad (28)$$

Ниже используется то, что ϕ_x лежит в пространстве $C([0,T];L_2(0,L))$, это следует из того, что $\phi \in L_2(0,T;H^3(0,L))$ и $\phi_t \in L_2(0,T;L_2(0,L))$. Сходимость второго слагаемого в правой части неравенства (28) следует из неравенств

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^L |(g_h^*(u_h) - g_h^*(u))\phi_x| dxdt \le C\int\limits_0^T\int\limits_0^L (u_h^2 + u^2 + 1)|u_h - u||\phi_x| dxdt \le \\ \le C||u_h - u||_{L_2(Q_T)}\Big(\int\limits_0^T\int\limits_0^L (u_h^2 + u^2 + 1)^2\phi_x^2 dxdt\Big)^{\frac12} \le \\ \le C_1||u_h - u||_{L_2(Q_T)}||\phi_x||_{C([0,T];L_2(0,L))}\big(\int\limits_0^T \sup_{x\in(0,L)} u^4 dt + \int\limits_0^T \sup_{x\in(0,L)} u_h^4 dt + \int\limits_0^T dt\big)^{\frac12} \le \\ \le C_2||u_h - u||_{L_2(Q_T)}||\phi_x||_{C([0,T];L_2(0,L))}\big(\int\limits_0^T\int\limits_0^L u^2 dx \int\limits_0^L u_x^2 dxdt + \int\limits_0^T\int\limits_0^L u_h^2 dx\int\limits_0^L u_{hx}^2 dxdt + T\big)^{\frac12} \le$$

$$\le C_2||u_h - u||_{L_2(Q_T)}||\phi_x||_{C([0,T];L_2(0,L))}\big(||u||^2_{C([0,T];L_2(0,L))}||u||^2_{L_2(0,T;H^1(0,L))} + \\ + ||u_h||^2_{C([0,T];L_2(0,L))}||u_h||^2_{L_2(0,T;H^1(0,L))} + T\big)^{\frac12} \le \\ \le C_2||u_h - u||_{L_2(Q_T)}||\phi_x||_{C([0,T];L_2(0,L))}\big(||u||^4_{X_0(Q_T)} + ||u_h||^4_{X_0(Q_T)} + T\big)^{\frac12} \to 0. \quad (29)$$

Первое слагаемое в правой части неравенства (28) стремится к нулю по теореме Лебега, так как $g_h(\theta) \to g(\theta)$ поточечно при любом θ,

$$\int\limits_0^{|u|} \big|g_h(\theta) - g(\theta)\big| d\theta \le C(|u|^3 + |u|),$$

и справедливо неравенство

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^L (|u|^3 + |u|)|\phi_x| dxdt \le C_1||\phi_x||_{C([0,T];L_2(0,L))}||u||_{L_2(Q_T)}||u||^2_{X_0(Q_T)} < +\infty,$$

которое получается, аналогично оценке (29).

Таким образом, получаем, что $u \in L_\infty(0,T;L_2(0,L)) \cap L_2(0,T;H^1(0,L))$ и удовлетворяет интегральному тождеству (8). Докажем, что $u \in X_0(Q_T)$. Для этого рассмотрим линейную задачу (16), (2), (3), где $f = -g(u)u_x$. Покажем, что $g(u)u_x \in L_1(0,T;L_2(0,L))$

$$||g(u)u_x||_{L_1(0,T;L_2(0,L))} \le C\int_0^T \Big(\int_0^L (u^4+1)u_x^2dx\Big)^{\frac{1}{2}}dt \le$$
$$\le C\Big(\int_0^T \sup_{x\in(0,L)} u^2\Big(\int_0^L u_x^2dx\Big)^{\frac{1}{2}}dt + T^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^T\int_0^L u_x^2dxdt\Big)^{\frac{1}{2}}\Big) \le$$
$$\le C\Big(\int_0^T \Big(\int_0^L u^2dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^L u_x^2dx\Big)dt + T^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^T\int_0^L u_x^2dxdt\Big)^{\frac{1}{2}}\Big) \le$$
$$\le C\big(||u||_{L_\infty(0,T;L_2(0,L))} + ||u_x||_{L_2(Q_T)}\big)\big(||u_x||^2_{L_2(Q_T)} + T^{\frac{1}{2}}\big) < \infty.$$

Тогда из [6, Theorem 6.4] следует, что такая линейная задача будет иметь единственное решение в пространстве $L_\infty(0,T;L_2(0,L)) \cap L_2(0,T;H^1(0,L))$. Из [4, Lemma 4.3] получим, что рассмотренная линейная задача будет иметь решение в $X_0(Q_T)$. □

Докажем теорему 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим решение задачи (1)–(3), которая совпадает с задачей (16), (2), (3), в случае $f = -g(u)u_x$. Тогда можем воспользоваться (25) и получим

$$\int_0^L (1+x)u^2(t,x)dx + 3\int_0^t\int_0^L u_x^2(\tau,x)dxd\tau + \int_0^t \mu^2(\tau)d\tau = \int_0^L (1+x)u_0^2(x)dx +$$
$$+ a\int_0^t\int_0^L u^2(\tau,x)dxd\tau - 2\int_0^t\int_0^L (1+x)g(u)uu_xdxdt.$$

Очевидно, что все члены этого равенства абсолютно непрерывны по t. Из того, что

$$-\int_0^L (1+x)g(u)uu_xdx = \int_0^L\int_0^u g(\theta)\theta d\theta dx$$

получим, что справедлива оценка для п. в. t

$$\frac{d}{dt}\int_0^L (1+x)u^2(t,x)dx + 3\int_0^L u_x^2dx \le a'\int_0^L (1+x)u^2(t,x)dx + 2\int_0^L\int_0^u g(\theta)\theta d\theta dx \le$$
$$\le a'\int_0^L (1+x)u^2(t,x)dx + 2C\int_0^L \Big(\frac{u^4}{4} + \frac{u^2}{2}\Big)dx. \quad (30)$$

Преобразуем (30), воспользовавшись следующим неравенством из [8]:

$$||u||_{L_\infty(0,L)} \leq \frac{\sqrt{L}}{2}||u_x||_{L_2(0,L)}.$$

Получим

$$\frac{d}{dt}\Big(\int\limits_0^L (1+x)u^2(t,x)dx\Big)+\int\limits_0^L (3-A+A-\frac{CL^2}{4}-\frac{CL}{8}||u(t,\cdot)||^2_{L_2(0,L)})u_x^2dx \leq a'\int\limits_0^L (1+x)u^2(t,x)dx.$$

Из условия (9) и соотношения (24) получим

$$\frac{d}{dt}\Big(\int\limits_0^L (1+x)u^2(t,x)dx\Big) + \int\limits_0^L (3-A)u_x^2dx \leq a'\int\limits_0^L (1+x)u^2(t,x)dx.$$

Воспользуемся неравенством Стеклова

$$||u||_{L_2(0,L)} \leq \frac{L}{\pi}||u_x||_{L_2(0,L)},$$

получим

$$\frac{d}{dt}\Big(\int\limits_0^L (1+x)u^2(t,x)dx\Big) \leq \Big(-\frac{(3-A)\pi^2}{L^2(1+L)}+a'\Big)\int\limits_0^L (1+x)u^2dx.$$

Далее, из условия (10) очевидными рассуждениями получаем (11). □

Список литературы

[1] L. Rosier, B.-Y. Zhang, “Global stabilization of the generalized Korteweg–de Vries qquation posed on a finite domain”, *SIAM J. Control and Optimization*, **45**:3 (2006), 927–956.

[2] G. Perla Menzala, C. F. Vasconcellos, E. Zuazua, “Stabilization of the Korteweg–de Vries equation with localized damping”, *Quarterly of Applied Mathematics*, **60**:1 (2002), 111–129.

[3] F. Linares, A. F. Pazoto, “On the exponential decay of the critical generalized Korteweg–de Vries equation with localized damping”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **135**:5 (2007), 1515–1522.

[4] A. V. Faminskii, N. A. Larkin, “Odd-order quasilinear evolution equations posed on a bounded interval”, *Bol. Soc. Paranaense Mat.*, **28**:1 (2010), 67–77.

[5] A. V. Faminskii, A. Nikolayev, “On stationary solutions of KdV and mKdV equations”, *Differential and Difference Equations with Applications*, **164** (2016), 63–70.

[6] A. V. Faminskii, “Weak solutions to initial-boundary-value problems for quasilinear evolution equations of an odd order”, *Advances in Differential Equations*, **17**:5-6 (2012), 421–470.

[7] A. Pazy, *Applied Mathematical Sciences*. V. 44, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Tokyo, 1983.

[8] Y. Kametaka, H. Yamagishi, K. Watanabe, A. Nagai, K. Takemura, “The best constant of Sobolev inequality corresponding to Dirichlet boundary value problem for $(-1)^M(d/dx)^{2M}$”, *Sciential Mathematical Japanical Online*, 2008, 439–451.

References

[1] L. Rosier, B.-Y. Zhang, “Global stabilization of the generalized Korteweg–de Vries qquation posed on a finite domain”, *SIAM J. Control and Optimization*, **45**:3 (2006), 927–956.

[2] G. Perla Menzala, C. F. Vasconcellos, E. Zuazua, “Stabilization of the Korteweg–de Vries equation with localized damping”, *Quarterly of Applied Mathematics*, **60**:1 (2002), 111–129.

[3] F. Linares, A. F. Pazoto, “On the exponential decay of the critical generalized Korteweg–de Vries equation with localized damping”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **135**:5 (2007), 1515–1522.

[4] A. V. Faminskii, N. A. Larkin, “Odd-order quasilinear evolution equations posed on a bounded interval”, *Bol. Soc. Paranaense Mat.*, **28**:1 (2010), 67–77.

[5] A. V. Faminskii, A. Nikolayev, “On stationary solutions of KdV and mKdV equations”, *Differential and Difference Equations with Applications*, **164** (2016), 63–70.

[6] A. V. Faminskii, “Weak solutions to initial-boundary-value problems for quasilinear evolution equations of an odd order”, *Advances in Differential Equations*, **17**:5-6 (2012), 421–470.

[7] A. Pazy, *Applied Mathematical Sciences*. V. 44, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Tokyo, 1983.

[8] Y. Kametaka, H. Yamagishi, K. Watanabe, A. Nagai, K. Takemura, “The best constant of Sobolev inequality corresponding to Dirichlet boundary value problem for $(-1)^M(d/dx)^{2M}$”, *Sciential Mathematical Japanical Online*, 2008, 439–451.

Информация об авторе

Николаев Артем Александрович, аспирант, кафедра нелинейного анализа и оптимизации. Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: nicepeopleproject@gmail.com

ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4561-8990

Поступила в редакцию 10.01.2019 г.
Поступила после рецензирования 11.02.2019 г.
Принята к публикации 14.03.2019 г.

Information about the author

Artyom A. Nikolayev, Post-Graduate Student, Nonlinear Analysis and Optimization Department. RUDN University, Moscow, the Russian Federation. E-mail: nicepeopleproject@gmail.com

ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4561-8990

Received 10 January 2019
Reviewed 11 February 2019
Accepted for press 14 March 2019